Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 1

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -2mv^4 \cos kx$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла $v_0/2$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(\dot{x} + \dot{y}) - \sin x + y + t\dot{y}$. Известно, что $x(0) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$, $y(1) = 0$, $\dot{y}(1) = 1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^2 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = x^2 + 3/x^2$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} - x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = -2\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 3/r^2 + 3r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $3m$, движущиеся со скоростью $v_0/2$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их скорости. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 2/r^6$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 2

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -4mv^{-4}\sin x$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла αv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(x+y) + \dot{y}^2 - 3x^2 + 4ty$. Известно, что $x(0) = 1$, $y(0) = 2$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2/x + \dot{y}\dot{z}/x^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 2$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 2\dot{\mathbf{r}}^2/r^4 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 2x + 1/x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 3xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 2/r - 3/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 4. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $3m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 3/r^5$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 3

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -3m\alpha v^2(t^2 - t_0^2)$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 2v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $3t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(3x^2 + 2\dot{x} + 3t) + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + t^2 \ln t$. Известно, что $x(1) = 0$, $\dot{x}(0) = -2$, $y(2) = 0$, $\dot{y}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = x^6\dot{x}^2 + 3x^2\dot{y}\dot{z}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^5 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = \operatorname{tg}^2 2x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + 2\eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 3/r^2 - r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $6m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 5/r^8$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 4

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -4mv^{-4}\sin x$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла αv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}\dot{y}x + 3x^2 + x^2\dot{x} + t^4$. Известно, что $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$, $y(2) = 0$, $\dot{y}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}\dot{z}e^x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^3 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 2x^6$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 - x\dot{y}^2 + xy - 4x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -2/r - 4/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $5m$, движущиеся со скоростью $5v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по проекциям их импульса на направление, перпендикулярное исходному движению. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 4/r^7$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 5

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -3m\alpha v^3(t^3+1)$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $2t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{y}(\dot{y} + 6t + y^4) + \dot{y}\dot{z} + \dot{z}^2 + t^2 \sin t$. Известно, что $y(2) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $z(2) = 0$, $\dot{z}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{z}^2 + 2\dot{y}\dot{x}e^{2z}$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^2 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 2x + 3/x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 - x\dot{y}^2 + x(y+3)$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi - \eta$, $y = 2\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -2/r^2 + 3r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 4. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $3m$, движущиеся со скоростью v_0, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 7/r^4$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 6

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m\alpha \sin t / v e^{v}$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 2v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $4t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}(\dot{x} + 3\dot{y}) + y - \cos x + t\dot{y}$. Известно, что $x(0) = 0$, $\dot{x}(1) = 2$, $y(1) = 0$, $\dot{y}(1) = 1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = 2x^2\dot{y}\dot{z} + x^6\dot{x}^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2/r^2 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = \operatorname{th}^2 3x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(\dot{x} - \dot{y}) - 2x^2 + y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = -2\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -3/r + 3/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $2m$, движущиеся со скоростью $v_0/2$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 6/r^9$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 7

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -2mx^4/\cos(v^2)$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла βv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}\dot{y}x + 4t^3 \sin t + x^2 + x^3\dot{x}$. Известно, что $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$, $y(2) = 0$, $\dot{y}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{y}^2/y + \dot{x}\dot{z}/y$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^5 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 5x^8$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}\dot{y} + 2\dot{x}^2 + x^2 - 2y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = 3\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -3/r^2 - 2r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -5/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $7m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по проекциям их импульса на направление исходного движения. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 9/r^6$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 8

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -mx^5/(v^2 - v_0^2)$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла αv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(x + 2z) + \dot{z}^2 + x^2 + 4t^2 z$. Известно, что $x(0) = 1,\ z(0) = 1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $(\dot{z}^2 + \dot{y}\dot{x})/z$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 2\dot{\mathbf{r}}^2/r^2 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = x^2 - 4/x^2$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = 2\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 2/r + 6/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 1/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $6m$, движущиеся со скоростью $v_0/2$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по значениям их скорости. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 8/r^5$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 9

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m\alpha \operatorname{tg} t/v^3$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 2v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $10t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = (1/x^2 + \dot{x} + t^2)\dot{x} + \dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2 + t^2$. Известно, что $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -2$, $y(2) = 0$, $\dot{y}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2/x + \dot{y}\dot{z}/x^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^7 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = \operatorname{cth}^2 4x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 3x^2 y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi\eta$, $y = \xi + \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 1/r^2 + 5r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $9m$, движущиеся со скоростью v_0, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их скорости. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 3/r^{11}$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 10

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m(x_0 - x)^5 \operatorname{ctg}(v^2 - v_0^2)$. В начальный момент времени $x(0) = 0, v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла αv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{z} + \dot{y})\dot{z} - \sin z + 2y + 2t\dot{y}$. Известно, что $z(0) = 0,\ \dot{z}(1) = 2,\ y(1) = 0,\ \dot{y}(1) = 1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 1, z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^6 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = \operatorname{tg}^2 3x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2x\dot{y}^2 + xy + x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -2\xi + \eta,\ y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 3/r + 7/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 5. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $6m$, движущиеся со скоростью $2v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 2/r^{10}$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 11

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m\alpha e^t/v^5$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 2v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $2t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{y}(\dot{y} + t + \cos y) + \dot{y}\dot{z} + \dot{z}^2 + t^2\cos t$. Известно, что $y(1) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $z(2) = 0$, $\dot{z}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{y}^2/y + 2\dot{x}\dot{z}/y^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 1$, $\dot{z}(0) = 1$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^6 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 2x^2 - 8/x^2$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = -2\dot{x}^2 + x\dot{y}^2 - xy + 2x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 1/r^2 - 3r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $4m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по проекциям их скорости на направление исходного движения. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 4/r^6$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 12

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m\alpha \exp(v^2)\mathrm{e}^t/v$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 2v_0$. Найдите скорость частички в момент времени t_1.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}_1(q_1 + \dot{q}_1 + 3t) + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 4t^2 + \dot{q}_2{}^2$. Известно, что $q_1(1) = 0$, $\dot{q}_1(0) = -1$, $q_2(2) = 0$, $\dot{q}_2(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{y}^2/y + \dot{x}\dot{z}/y$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^8 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = -x - 5/x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 - \dot{x}\dot{y} - x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -2\xi - \eta$, $y = -\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -1/r + 3/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 1. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $2m$, движущиеся со скоростью $2v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 4/r^6$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 13

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m/v^2\sqrt{x - x_0}$. В начальный момент времени $x(0) = 0,\ v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла αv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = (x - 4y)\dot{y} + \dot{x}^2 - y^2 + tx/2$. Известно, что $x(0) = 3,\ y(0) = 2$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 4\dot{\mathbf{r}}^2/r^4 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 1/\cos^2 4x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 - y + 2x^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -2\eta$, $y = 2\xi + \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 3/r^2 - 2r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $6m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 6/r^8$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 14

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -mv^8\sqrt{x_0 - x}$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла βv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - \mathrm{e}^{q_1} + q_2 + t\dot{q}_2$. Известно, что $q_1(0) = 0$, $\dot{q}_1(2) = 1$, $q_2(2) = 0$, $\dot{q}_2(2) = 1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = y\dot{y} + \dot{x}^2/x + \dot{y}\dot{z}/x^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^3/r^8 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 4x^{10}$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi\eta$, $y = \xi - \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 2/r - 1/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $5m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их энергии. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 5/r^7$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 15

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -\operatorname{tg}(v^2)\mathrm{e}^t/v$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 2v_0$. Найдите скорость частички в момент времени αt_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(\dot{x} + t + x^4/2) + 2\dot{x}\dot{z} + 3\dot{z}^2 + t^2$. Известно, что $x(2) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $z(2) = 0$, $\dot{z}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^6/r^6 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 1/\operatorname{ch}^2 5x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 4xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = 2\xi + \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -1/r^2 - r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 4. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $3m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по проекциям их скорости на направление исходного движения. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 4/r^6$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 16

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -v^6 \cos kx$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла βv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2x\dot{x}\dot{y} + x^2 + x\dot{x} + t^4 \ln t$. Известно, что $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(2) = 0$, $\dot{y}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 2\dot{\mathbf{r}}^4/r^3 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 4x + 6/x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 3\dot{x}^2 + x\dot{y}^2 + xy + 4x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -\xi + \eta$, $y = -2\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -2/r - 4/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 3. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $2m$, движущиеся со скоростью $v_0/2$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по значениям их энергии. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 7/r^9$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 17

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -2\alpha v^2(t^3 - t_0^3)$. В начальный момент времени $x(0) = 0,\ v(0) = 3v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $3t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{y}(z + \sin y) + \dot{z}^2 - 3y^2 + 4tz$. Известно, что $y(0) = 1,\ z(0) = 2$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{z}^2/z + z\dot{z} + 2\dot{x}\dot{y}/z^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 5\dot{\mathbf{r}}^4/r^5 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 6x^6$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = -\dot{x}^2 + x\dot{y}^2 + 3xy - 4x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = 2\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -3/r^2 + 6r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 3. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $5m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 4/r^4$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 18

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -4mv^{-6}\sin x$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла βv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(2\dot{x} + \dot{y}) + 2yt - x^2 + t^2\dot{y}$. Известно, что $x(0) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$, $y(1) = 0$, $\dot{y}(1) = 1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}\dot{q_3})/q_1$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q_1(0) = 1$, $\dot{q_1}(0) = 2$, $q_2(0) = 1$, $\dot{q_2}(0) = 1, q_3(0) = 0$, $\dot{q_3}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^4/r^6 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 8x^2 + 8/x^2$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 - \dot{x}\dot{y} + 4x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = 2\xi - \eta$, $y = \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 5/r + 6/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $4m$, движущиеся со скоростью $3v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 9/r^7$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 19

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -3m\alpha v^3(t^4+1)$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $2t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{q}_1(2\dot{q}_1 + t^2 + q_1) + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2{}^2 + 1/t^2$. Известно, что $q_1(1) = 0$, $\dot{q}_1(0) = 0$, $q_2(2) = 0$, $\dot{q}_2(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^6/r^4 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 1/\operatorname{sh}^2 4x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + 3\eta$, $y = 2\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 4/r^2 - r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 1. Расстояние до центра при этом равно 5. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $7m$, движущиеся со скоростью $v_0/2$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их энергии. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 4/r^7$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 20

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -mx^5/\cos(v^2)$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла βv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{y}/t + (\dot{x} + 2\dot{y})\dot{x} - x^4 - y/t^2$. Известно, что $x(0) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$, $y(1) = 0$, $\dot{y}(1) = 1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^10 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 1/\sin^2 6x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = 2\xi + \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 1/r - 3/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом $30°$ к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 1. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $6m$, движущиеся со скоростью v_0, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по значениям их скорости. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 6/r^{12}$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 21

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m\alpha \sin t / v e^{v}$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $5t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{z}\dot{y}z + z^2 + z^2\dot{z} + t^2$. Известно, что $z(0) = 2$, $\dot{z}(0) = -2$, $y(2) = 0$, $\dot{y}(1) = -1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2/q_1 + \dot{q_2}\dot{q_3}/q_1^2$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $q_1(0) = 1$, $\dot{q_1}(0) = 1$, $q_2(0) = 1$, $\dot{q_2}(0) = 1, q_3(0) = 0$, $\dot{q_3}(0) = 1$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^8/r^2 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 3x^2 - 3/x^2$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 - 3\dot{y}^2 + xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = 2\xi + \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -2/r^2 - 8r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 3. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $5m$, движущиеся со скоростью $4v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по значениям их скорости. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 5/r^4$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 22

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -x^7/(v^2 - v_0^2)$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла αv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(y + x/(x^2+1)) + 2\dot{y}^2 - x^2 + t^2 y$. Известно, что $x(0) = 1$, $y(0) = 2$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (5\dot{x}^2 + 2\dot{y}\dot{z} + \dot{x})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 1$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 5\dot{\mathbf{r}}^4/r^5 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = -x - 6/x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 - 2x\dot{y}^2 + xy - x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -2/r + 2/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 4. Расстояние до центра при этом равно 1. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $5m$, движущиеся со скоростью $v_0/3$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение легких частиц по значениям их импульса на направление исходного движения. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 4/r^6$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 23

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m\alpha \operatorname{ctg} t/v^3$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 2v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $5t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(\dot{x} + 2\dot{y}) - 1/x + y + t\dot{y}$. Известно, что $x(0) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$, $y(4) = 0$, $\dot{y}(4) = 2$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = \dot{y}^2/y + \dot{z} + \dot{x}\dot{z}/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1, z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = \dot{\mathbf{r}}^2/r^1 2 - U(\mathbf{r})$, где $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r}$, $t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = \operatorname{ctg}^2 8x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = -4\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 - xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -2\xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = -1/r - 1/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = 2/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 4. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $3m$, движущиеся со скоростью $v_0/2$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по проекциям их импульса на направление исходного движения. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в $ц$-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 6/r^4$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 24

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m(x_0 - x)^4 \operatorname{ctg}(v^2 - v_0^2)$. В начальный момент времени $x(0) = 0, v(0) = v_0$. Найдите координату частички в момент времени, когда ее скорость составляла βv_0.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}\dot{y}x + x^2 + x^6\dot{x} + t$. Известно, что $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ y(2) = 0,\ \dot{y}(1) = -2$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 1, z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 6\dot{\mathbf{r}}^4/r^2 - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (однородное поле). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 1/\operatorname{sh}^2 8x$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} - 4x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + 2\eta,\ y = \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 2/r - 8/r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -4/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 2. Расстояние до центра при этом равно 2. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $2m$, движущиеся со скоростью $v_0/4$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их скорости. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в ц-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 4/r^5$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.

Домашнее задание №14

Свойства пучков частиц

Вариант 25

1. На частичку массой m, движущуюся вдоль оси x, действует сила $F = -m\alpha e^{2t}/v^5$. В начальный момент времени $x(0) = 0,\ v(0) = 2v_0$. Найдите скорость частички в момент времени $4t_0$.

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(x^2+2y)+2\dot{y}^2-4x^2+y/t^4$. Известно, что $x(0) = 1,\ y(0) = 1$. Найдите зависимость координат от времени.

3. Функция Лагранжа системы с тремя степенями свободы имеет вид $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$. Найдите зависимость координат системы от времени, если в начальный момент времени $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 1, z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 4$.

4. Функция Лагранжа частицы $L = 7\dot{\mathbf{r}}^2/r^7 - \dot{\mathbf{r}}^4 A(\mathbf{r})$, где $A(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n A(\mathbf{r})$ (однородная функция). При каком n преобразование подобия $\mathbf{r}' = k_1\mathbf{r},\ t' = k_2 t$ не меняет функцию Лагранжа системы? Укажите явный вид преобразования, оставляющего неизменным вид действия и с помощью теоремы Нётер найдите соответствующий интеграл движения.

5. Частичка массой $m = 2$ движется в поле $U(x) = 10x^{12}$. В каком случае ее движение финитно? Найдите период движения как функцию энергии частицы. Изобразите фазовый портрет для рассматриваемой системы.

6. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = -2\dot{x}^2 - x\dot{y}^2 + xy + x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -\xi - \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

7. Частица массой $m = 2$ движется в центральном поле $U = 8/r^2 + 4r^2$. Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?

8. Частица массой $m = 2$ движется в поле $U = -3/r$. В некоторый момент времени ее скорость направлена под углом 30° к направлению на центр поля и равна 3. Расстояние до центра при этом равно 3. Получите уравнение траектории, по которой движется частица. Чему равно минимальное/максимальное расстояние до центра поля?

9. Частицы массой $2m$, движущиеся со скоростью $2v_0$, распадаются на два осколка. Масса более легких осколков m, их скорость в системе отсчета центра масс равна v_0. Найдите распределение тяжелых частиц по значениям их импульса. Считайте распределение по направлениям вылета частиц в *ц*-системе изотропным.

10. Пучок частиц массой $m = 2$, имеющих скорость $v = 1$, рассеивается в поле $U = 5/r^7$. Найдите дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы.